PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA
U.M.I. UNIONE MATEMATICA ITALIANA
MINISTERO DELLA PUBBLICA ISTRUZIONE
SCUOLA NORMALE SUPERIORE

I Giochi di Archimede -- Soluzioni triennio

19 novembre 2008

Griglia delle risposte corrette

Problema	Risposta corretta
1	A
2	B
3	A
4	A
5	C
6	D
7	E
8	B
9	B
10	E
11	B
12	A
13	D

Problema	Risposta corretta
14	D
15	C
16	E
17	C
18	E
19	A
20	D
21	E
22	D
23	B
24	C
25	A

Risoluzione dei problemi

1. La risposta è **(A)**.
Se il pilota vuole percorrere 50 km alla velocità media di 100 km/h il tempo complessivo per percorrerli deve essere di mezz'ora. D'altra parte per coprire solo la prima metà del percorso ha già impiegato più di mezz'ora e qualsiasi sia la velocità media con cui copre la seconda metà, il tempo complessivo di percorrenza sarà strettamente maggiore di mezz'ora.

2. La risposta è **(B)**.
Indichiamo con A, B e C il numero di birilli buttati giù da Alberto, Barbara e Clara rispettivamente. Abbiamo $A + B + C \leq 2008$; inoltre $A = 3B$ e $B = 2C$ quindi $A = 6C$. Allora $6C + 2C + C = 9C \leq 2008$ da cui segue
$$C \leq \frac{2008}{9} = 223 + \frac{1}{9}\,.$$
Poichè C è un numero naturale abbiamo che il numero massimo di birilli che Cliara può aver buttato giù è 223. Di conseguenza il numero massimo di birilli che Alberto può aver buttato giù è $223 \times 6 = 1338$.

3. La risposta è **(A)**.
Indichiamo con N il numero di amici di Pietro e Paolo che partcipano alla festa in pizzeria,

(esclusi Pietro e Paolo stessi). Il conto della cena in Euro deve coincidere sia con $12(N+2)$ che con $16N$. Uguagliando queste due quantità si ottiene $12N + 24 = 16N$ da cui si ricava $N = 6$.

4. La risposta è **(A)**.
   Indichiamo con N il numero di maestri presenti quest'anno e con S il loro stipendio per quest'anno. La spesa complessiva per quest'anno è dunque SN. Il prossimo anno ci saranno $\frac{7}{10}N$ maestri e lo stipendio di ciscuno di loro sarà di $\frac{135}{100}S$. La spesa complessiva sarà allora
   $$\frac{7}{10}N\,\frac{135}{100}S = SN\,\frac{945}{1000}$$
   ovvero il $94,5$ % della spesa di quest'anno. Quindi la spesa complessiva diminuirà del $5,5$ %.

5. La risposta è **(C)**.
   In base al teorema di Pitagora l'ipotenusa AB del triangolo ABC misura $\sqrt{7^2+24^2}$ cm $=$ $\sqrt{49+576}$ cm $=$ $\sqrt{625}$ cm $= 25$ cm. Quindi il perimetro del triangolo ABC è di $(24+7+25)$ cm $= 56$ cm. Il triangolo HBC è anch'esso rettangolo ed è simile ad ABC. Quindi il rapporto tra il perimetro di HBC e quello di ABC è pari al rapporto tra le misure delle loro ripettive ipotenuse ovvero è pari a $\frac{7}{25}$. Quindi il perimetro di HBC è $56\,\frac{7}{25}$ cm $=\frac{392}{25}$ cm.

6. La risposta è **(D)**.
   Data un'equazione di secondo grado che ammetta due soluzioni reali e che abbia coefficiente del termine di secondo grado uguale a 1, la somma delle soluzioni coincide con il termine di primo grado cambiato di segno, e il loro prodotto è pari al termine noto. Quindi, se l'equazione del problema ammette due soluzioni reali, la loro somma deve essere uguale a $-b$ e il loro prodotto deve essere -16. Se richiediamo inoltre che le soluzioni siano intere si hanno solo le seguenti possibilità:

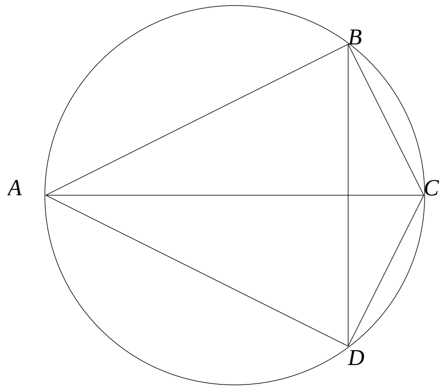
   - una delle soluzioni è 1 e l'altra è $-16 \Rightarrow\; b = 15$;
   - una delle soluzioni è -1 e l'altra è $16 \Rightarrow\; b = -15$;
   - una delle soluzioni è 8 e l'altra è $-2 \Rightarrow\; b = -6$;
   - una delle soluzioni è -8 e l'altra è $2 \Rightarrow\; b = 6$;
   - una delle soluzioni è -4 e l'altra è $4 \Rightarrow\; b = 0$.

   Pertanto b può assumere 5 valori distinti.

7. La risposta è **(E)**.
   Indichiamo con O e O' i centri del cerchio grande e del cerchio piccolo rispettivamente e siano P e P' i punti in cui il segmento OO' interseca il cerchio grande e il cerchio piccolo, rispettivamente. La lunghezza del segmento PP' è la distanza minima tra i due cerchi. D'alra parte la lunghezza di questo segmento è data dalla lunghezza di OO' meno la somma dei due raggi dei cerchi. In base al Teorema di Pitagora abbiamo
   $$\overline{OO'} = \sqrt{1^2+3^2}\,\text{cm} = \sqrt{10}\,\text{cm}\,.$$
   Quindi
   $$\overline{PP'} = (\sqrt{10} - (2+1))\,\text{cm} = (\sqrt{10} - 3)\,\text{cm}\,.$$

8. La risposta è **(B)**.
Fissato comunque un numero naturale n abbiamo
$$S_n = n + 2n + \cdots + 10n = n(1 + 2 + \cdots + 10) = n\,55\,.$$
Quindi
$$S_1 + S_2 + \cdots + S_{10} = 55(1 + 2 + \cdots + 10) = 55 \cdot 55 = 3025\,.$$

9. La risposta è **(B)**.
Osserviamo che i triangoli ABC e ACD sono rettangoli perchè inscritti in una semicirconferenza. Chiamiamo a e b le misure dei lati AB e BC rispettivamente. L'area del quadrilatero $ABCD$ è la somma delle aree dei triangoli ABC e ACD, quindi
$$\frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} = ab = 48\,\mathrm{cm}^2\,.$$



Inoltre
$$2a + 2b = 28\,\mathrm{cm} \Rightarrow a + b = 14\,\mathrm{cm}\,.$$
Quindi conosciamo somma e prodotto di a e b e sappiamo allora che essi sono le soluzioni dell'equazione di secondo grado
$$x^2 - 14x + 48 = 0\,,$$
da cui si ricava $a = 8$ cm e $b = 6$ cm oppure $a = 6$ cm e $b = 8$ cm. In ciascuno di questi due casi abbiamo
$$\overline{AC} = \sqrt{6^2 + 8^2}\,\mathrm{cm} = 10\,\mathrm{cm}$$
e quindi il raggio di c misura 5 cm.

10. La risposta è **(E)**.
Se calcoliamo "a mano" i primi termini della sequenza troviamo:
$$0\,,1\,,1\,,2\,,4\,,8\,,16\,,32\,,\ldots$$
Ovvero, eccettuato il primo termine, sono tutti potenze di 2 e più precisamente dal terzo termine in poi vale
$$F_n = 2^{n-3}\,,$$
dove F_n indica il termine n–esimo della sequenza. Questa uguaglianza può essere dimostrata così: per $n \geq 3$ possiamo scrivere
$$\begin{aligned} F_n &= F_{n-1} + \cdots + F_0\,,\\ F_{n+1} &= F_n + F_{n-1} + \cdots + F_0 = F_n + F_n = 2F_n\,. \end{aligned}$$
Quindi ogni termine della sequenza (dal quarto in poi) è il doppio del precedente. Poichè il terzo termine è $F_3 = 1 = 2^0$ segue che $F_n = 2^{n-3}$. In particolare $F_{15} = 2^{12} = 4096$.

11. La risposta è **(B)**.
Se eleviamo al cubo entrambi i termini dell'uguaglianza troviamo:

$$45 + 29\sqrt{2} = m^3 + 2\sqrt{2}n^3 + 3\sqrt{2}m^2n + 6mn^2 = m(m^2 + 6n^2) + n(3m^2 + 2n^2)\sqrt{2}\,.$$

Da questa relazione, sapendo che $\sqrt{2}$ non può essere espresso come rapporto di due numeri interi, segue

$$m(m^2 + 6n^2) = 45\,, \quad n(3m^2 + 2n^2) = 29\,.$$

29 è un numero primo che può essere scomposto solo come $1 \cdot 29$. Quindi, poiché n è minore di $(3m^2 + 2n^2)$, deve essere $n = 1$ e $3m^2 + 2 = 29$, da cui si trova facilmente $m = 3$ e $m + n = 4$.

12. La risposta è **(A)**.
Sia n il quattordicesimo dei ventisette numeri di cui si fa la media aritmetica, ovvero n si trova esattamente a metà della sequenza dei numeri consecutivi di cui stiamo facendo la media; allora la media è data da

$$\frac{(n-13) + (n-12) + \cdots + (n-1) + n + (n+1) + \cdots + (n+12) + (n+13)}{27} = \frac{27n}{27} = n\,.$$

Quindi $n = 2008$ e il più piccolo dei numeri di cui si fa la media è $n - 13 = 1995$.

13. La risposta è **(D)**.
Osserviamo che $\dfrac{6024}{6027} = \dfrac{2008}{2009}$; quindi la disuguaglianza che deve essere verificata può essere scritta nella forma

$$\frac{2008}{2009} > \frac{n}{n+1}\,.$$

Si vede allora che la disuguaglianza è vera per $n = 2007$ ed è falsa per $n = 2008$. Daltra parte la quantità

$$\frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

cresce al crescere di n, poichè la frazione $\dfrac{1}{n+1}$ decresce al crescere di n. Quindi la disuguaglianza è vera per $n = 2007$ e per tutti i valori $n \leq 2007$ mentre è falsa per $n \geq 2008$. Concludiamo che $N = 2007$ e la somma delle sue cifre è 9.

14. La risposta è **(D)**.
Dalla relazione contenuta nel problema si ricava:

$$(x+y)^2 - z^2 = 9\,,$$

ovvero

$$(x+y+z)(x+y-z) = 9\,.$$

Quindi $(x+y+z)$ e $(x+y-z)$ devono essere divisori di 9. In particolare, poichè x, y e z sono positivi, $(x+y+z)$ è positivo e quindi lo deve essere anche $(x+y-z)$. Il numero 9 può essere scomposto solo nei due modi $9 = 9 \times 1$, $9 = 3 \times 3$, come prodotto di interi positivi. Poichè $(x+y+z) > (x+y-z)$ (dato che $z > 0$) l'unica possibilità è

$$\begin{cases} x+y+z = 9 \\ x+y-z = 1 \end{cases}$$

Questo sistema porta a $z = 4$ e $x+y = 5$ e successivamente alle terne $(1,4,4)$, $(2,3,4)$, $(3,2,4)$, $(4,1,4)$. In tutto abbiamo quindi quattro soluzioni.

15. La risposta è **(C)**.
Dobbiamo considerare i multipli di 5 minori o uguali a 1000 che sono 200; a questi dobbiamo aggiungere i multipli di 7 minori o uguali a 1000, che sono 142. Otteniamo così $200+142 = 342$. A questi dobbiamo togliere i numeri che sono sia multipli di 5 che di 7, (perchè questi sono stati contati due volte): questi sono tutti e soli i multipli di 35 minori o uguali a 1000, ovvero 28. Complessivamente i numeri cercati sono $342 - 28 = 314$.

16. La risposta è **(E)**.
Supponiamo che ci siano almeno tre palline con su scritti numeri strettamente maggiori di zero; siano p, q e r i tre numeri scritti su queste tre palline. Il numero p, dovendo essere la somma dei numeri scritti su tutte le altre palline, sarà uguale alla somma di q, r e tutti i numeri scritti sulle altre 17 palline. Quindi $p \geq q + r$ e poichè $r > 0$ segue $p > q$. Ribaltando i ruoli di p e q si dimostra esattamente alla stessa maniera che $q > p$ e quindi si arriva ad una contraddizione. È quindi assurdo supporre che ci siano almeno tre palline con numeri strettamente positivi.

17. La risposta è **(C)**.
Consideriamo un percorso che parta da B; supponiamo che la prima strada percorsa sia BA. Se successivamente andiamo in C, non possiamo poi andare in B perchè rimarremmo bloccati, senza aver percorso tutte le strade. Se invece andiamo in D siamo poi obbligati ad andare in A rimanendo di nuovo bloccati e senza aver percorso la strada BC. Analogamente (il ragionamento è del tutto simmetrico) si dimostra che se partendo da B si va in C non è possibile completare il percorso con le caratteristiche richieste. Ancora per simmetria, questo dimostra anche che non esistono percorsi con le caratteristiche richieste che partano da D. Il percorso che parte da A:
$$A \to C \to B \to A \to D \to C$$
ha invece le caratteristiche richieste. Analogamente il percorso che parte da C:
$$C \to A \to B \to C \to D \to A$$
ha le proprietà richieste. In conclusione, esistono percorsi con le proprietà richieste solo partendo da A e da C.

18. La risposta è **(E)**.
La somma di tutti i numeri con due cifre è
$$10+11+\cdots+98+99 = (1+2+\cdots+98+99) - (1+2+\cdots+8+9) = \frac{99 \cdot 100}{2} - 45 = 45 \cdot 109\,.$$
A questa somma devo sottrarre la somma dei numeri formati da due cifre uguali:
$$11 + 22 + \cdots + 88 + 99 = 11(1 + 2 + \cdots + 8 + 9) = 11 \cdot 45\,.$$
Il risultato è quindi $45 \cdot 109 - 45 \cdot 11 = 45 \cdot 98 = 4410$.

19. La risposta è **(A)**.
Chiamiamo O il centro della circonferenza. L'angolo $\widehat{AOB}$ è di 120° e quindi l'angolo $\widehat{ACB}$ è di 60°. Inoltre, essendo corde che sottendono ad archi di lunghezza uguali AC e AB hanno lunghezza uguale. Deduciamo che il triangolo ABC è equilatero. Di conseguenza
$$\text{area}(AOC) = \text{area}(BOC) = 25\frac{\sqrt{3}}{4}\,\text{cm}^2\,.$$

L'area del settore circolare delimitato dall'arco ADB è pari ad un terzo dell'area del cerchio, ovvero è

$$25\frac{\pi}{3}\,\text{cm}^2\,.$$

L'area cercata è la somma delle aree dei triangoli AOC e BOC e da quella del settore circolare che abbiamo appena calcolato:

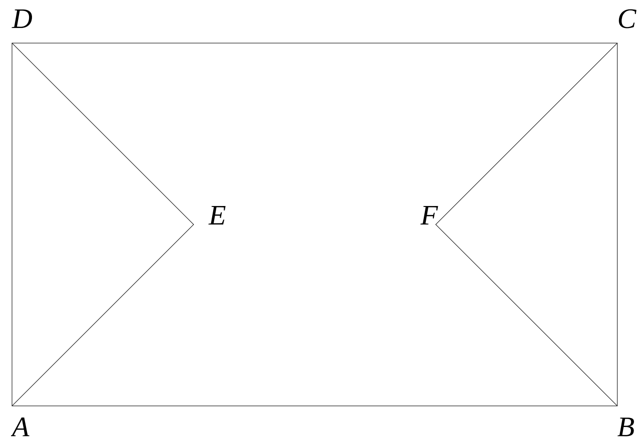
$$25\frac{\sqrt{3}}{4}\,\text{cm}^2 + 25\frac{\sqrt{3}}{4}\,\text{cm}^2 + 25\frac{\pi}{3}\,\text{cm}^2 = 25\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}\right)\,\text{cm}^2\,.$$

20. La risposta è **(D)**.
Indichiamo con N il numero delle caselle di ciascuna riga e di ciascuna colonna della scacchiera. Indichiamo inoltre con M il numero di caselle della seconda colonna, successive, secondo la numerazione indicata, alla casella con il numero 38. Nella terza colonna ci sono allora M caselle che precedono la casella 43 nella numerazione indicata. Quindi $38+M+M+1 = 43$ da cui si ricava $M = 2$. Allora l'ultima (nella numerazione indicata) casella della seconda colonna ha il numero $38 + M = 40$, ma chiaramente questa casella ha il numero $2N$ e quindi $N = 20$ e il numero di caselle della scacchiera è $N^2 = 400$.

21. La risposta è **(E)**.
Dal fatto che Agilulfo non sia stato messo in punizione deduciamo che: *ieri Agilulfo non ha preso un brutto voto*, oppure *ieri pomeriggio la mamma non era in casa*. D'altra parte non possiamo dire con certezza che proprio una di queste due circostanze si sia verificata, nè, a maggior ragione, possiamo affermare che una delle due sia falsa. Quindi non si può essere certi che nessuna delle affermazioni **(A)**, **(B)**, **(C)**, **(D)** sia vera.

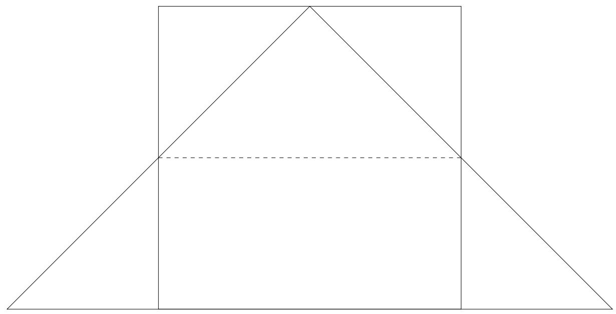
22. La risposta è **(D)**.
Supponiamo di aver scelto uno qualsiasi dei quindici giocatori della prima squadra; nella seconda squadra abbiamo la possibilità di scegliere tra quatordici giocatori (tutti eccettuato quello con lo stesso numero di maglia del giocatore scelto dalla prima squadra). Scelto anche il giocatore della seconda squadra, per scegliere il giocatore della terza squadra abbiamo tredici possibilità. Complessivamente abbiamo $15 \times 14 \times 13 = 2730$ possibilità distinte.

23. La risposta è **(B)**.
Facendo riferimento alla figura, i punti del rettangolo per i quali il lato più vicino è uno dei due lati lunghi 24 cm sono quelli appartenenti ai triangoli isosceli AED e BCF, rettangoli in E ed F rispettivamente. La lunghezza di DE è $\dfrac{24}{\sqrt{2}}$ cm e quindi l'area di AED è di $\dfrac{24^2}{4}$ cm^2 = 144 cm^2 e questa è anche l'area di BCF. Quindi la misura della parte di foglio colorata di giallo è = 288 cm^2



24. La risposta è **(C)**.
Nella figura vediamo una sezione assiale del cono e del cilindro. L'intersezione dei due solidi è formata da un cilindro circolare retto di raggio di base 10 cm e altezza 10 cm, e da un cono circolare retto di raggio di base 10 cm e altezza 10 cm. Quindi il volume dell'intersezione è

$$100\pi \cdot 10 \text{ cm}^3 + \frac{100\pi \cdot 10}{3} \text{ cm}^3 = \frac{4000\pi}{3} \text{ cm}^3 .$$



D'altra parte il volume del cono C è

$$\frac{400\pi \cdot 20}{3} \text{ cm}^3 = \frac{8000\pi}{3} \text{ cm}^3 .$$

Quindi il volume della parte di C contenuta nel cilindro T è la metà del volume complessivo di C e quindi rappresenta il 50 % del volume di C.

25. La risposta è **(A)**.
Se abbiamo un quadrato di tre caselle per ogni lato in cui, fissata una qualsiasi riga, colonna o diagonale, la somma dei numeri scritti nelle sue caselle (che supponiamo numeri interi) è uguale sempre allo stesso numero S, allora S deve essere un multiplo di tre.

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Infatti, facendo riferimento alla figura abbiamo:

$$(d+e+f)+(b+e+h)+(a+e+i)+(c+e+g) = S+S+S+S = 4S .$$

D'altra parte

$$(a+b+c)+(d+e+f)+(g+h+i) = S+S+S = 3S .$$

Sottraendo termine a termine la seconda uguaglianza dalla prima, troviamo

$$3e = S ,$$

ovvero S è un multiplo di 3. Quindi non esiste nessun quadrato con le caratteristiche richieste in cui $S = 4$.