PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA
U.M.I. UNIONE MATEMATICA ITALIANA
MINISTERO DELLA PUBBLICA ISTRUZIONE
SCUOLA NORMALE SUPERIORE

I Giochi di Archimede -- Soluzioni biennio

19 novembre 2008

Griglia delle risposte corrette

Problema	Risposta corretta
1	C
2	A
3	B
4	A
5	A
6	C
7	D
8	A
9	C
10	B

Problema	Risposta corretta
11	D
12	C
13	C
14	E
15	C
16	A
17	D
18	B
19	E
20	D

Risoluzione dei problemi

1. La risposta è **(C)**.
   I 2000 corridori che arrivano al traguardo sono il 5 % dei partecipanti alla maratona; quindi il numero totale dei partecipanti alla maratona è
   $$\frac{2000}{5} \times 100 = 40\,000\,.$$
   I 40 000 partecipanti alla maratona sono a loro volta l'80 % degli abitanti di Marte, quindi il numero complessivo di abitanti del pianeta è
   $$\frac{40\,000}{80} \times 100 = 50\,000\,.$$

2. La risposta è **(A)**.
   Se il pilota vuole percorrere 50 km alla velocità media di 100 km/h il tempo complessivo per percorrerli deve essere di mezz'ora. D'altra parte per coprire solo la prima metà del percorso ha già impiegato più di mezz'ora e qualsiasi sia la velocità media con cui copre la seconda metà, il tempo complessivo di percorrenza sarà strettamente maggiore di mezz'ora.

3. La risposta è **(B)**.
   Indichiamo con A, B e C il numero di birilli buttati giù da Alberto, Barbara e Clara rispettivamente. Abbiamo $A + B + C \leq 2008$; inoltre $A = 3B$ e $B = 2C$ quindi $A = 6C$. Allora $6C + 2C + C = 9C \leq 2008$ da cui segue
   $$C \leq \frac{2008}{9} = 223 + \frac{1}{9}\,.$$

Poichè C è un numero naturale abbiamo che il numero massimo di birilli che Clara può aver buttato giù è 223. Di conseguenza il numero massimo di birilli che Alberto può aver buttato giù è $223 \times 6 = 1338$.

4. La risposta è **(A)**.
Indichiamo con N il numero di amici di Pietro e Paolo che partcipano alla festa in pizzeria, (esclusi Pietro e Paolo stessi). Il conto della cena in Euro deve coincidere sia con $12(N+2)$ che con $16N$. Uguagliando queste due quantità si ottiene $12N + 24 = 16N$ da cui si ricava $N = 6$.

5. La risposta è **(A)**.
Indichiamo con N il numero di maestri presenti quest'anno e con S il loro stipendio per quest'anno. La spesa complessiva per quest'anno è dunque SN. Il prossimo anno ci saranno $\frac{7}{10}N$ maestri e lo stipendio di ciscuno di loro sarà di $\frac{135}{100}S$. La spesa complessiva sarà allora

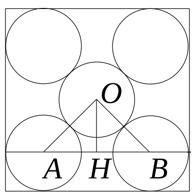
$$\frac{7}{10}N\,\frac{135}{100}S = SN\,\frac{945}{1000}$$

ovvero il $94,5\ \%$ della spesa di quest'anno. Quindi la spesa complessiva diminuirà del $5,5\ \%$.

6. La risposta è **(C)**.
In base al teorema di Pitagora l'ipotenusa AB del triangolo ABC misura $\sqrt{7^2 + 24^2}\,\text{cm} = \sqrt{49 + 576}\ \text{cm} = \sqrt{625}\ \text{cm} = 25\,\text{cm}$. Quindi il perimetro del triangolo ABC è di $(24 + 7 + 25)\,\text{cm} = 56\,\text{cm}$. Il triangolo HBC è anch'esso rettangolo ed è simile ad ABC. Quindi il rapporto tra il perimetro di HBC e quello di ABC è pari al rapporto tra le misure delle loro rispettive ipotenuse ovvero è pari a $\frac{7}{25}$. Quindi il perimetro di HBC è $56\,\frac{7}{25}\ \text{cm} = \frac{392}{25}\ \text{cm}$.

7. La risposta è **(D)**.
Indichiamo con l la lunghezza complessiva della strada da casa a scuola. Se x indica la strada percorsa da Pietro da quando esce da scuola a quando incontra la mamma, la strada percorsa dalla mamma da quando esce di casa a quando incontra Pietro è $2x$. Inoltre la somma di x e $2x$ deve essere uguale a l, dunque $3x = l$ e $\frac{x}{l} = \frac{1}{3}$. Questo vuol dire che nel momento in cui incontra la mamma Pietro ha percorso un terzo della strada e la mamma due terzi.

8. La risposta è **(A)**.
Facciamo riferimento alla figura qui sotto.



Indichiamo con d il diametro di ciascun biscotto, espresso in centimetri. Abbiamo che $AB + d = 40$ cm. Inoltre AB è la diagonale di un quadrato di lato d, dunque $AB = d\sqrt{2}$. Quindi $d\sqrt{2} + d = 40$ cm da cui possiamo ricavare il valore di d:

$$d = 40(\sqrt{2} - 1)\ \text{cm}\,.$$

9. La risposta è **(C)**.
Consideriamo i numeri della forma richiesta in cui 5 è la prima cifra. Ciascuna delle tre cifre restanti può assumere tutti i valori tra 0, 1, 2, 3 e 4, ovvero cinque valori distinti. I possibili numeri di questo tipo sono allora $5 \times 5 \times 5 = 5^3 = 125$. Nel caso in il 5 sia la seconda cifra, si può ragionare in maniera analoga ma bisogna tener conto che la prima cifra **non** può essere 0. Quindi i numeri possibili sono $4 \times 5 \times 5 = 100$. Lo stesso vale nel caso in cui il 5 sia la terza o la quarta cifra. In tutto abbiamo allora: $125 + 100 + 100 + 100 = 425$ possibilità.

10. La risposta è **(B)**.
Indichiamo con x la lunghezza del lato ND espressa in centimetri. Abbiamo:

$$\text{area}(AND) = \frac{x}{2}\,\text{cm}^2\,, \quad \text{area}(NMC) = \frac{(1-x)^2}{2}\,\text{cm}^2\,, \quad \text{area}(ABM) = \frac{x}{2}\,\text{cm}^2\,.$$

Quindi, dall'uguaglianza

$$\text{area}(ABCD) - [\text{area}(AND) + \text{area}(NMC) + \text{area}(ABM)] = \text{area}(ANM)\,,$$

segue

$$1\,\text{cm}^2 - x - \frac{(1-x)^2}{2} = \frac{4}{9}\,\text{cm}^2\,,$$

da cui, facendo un po' di conti si ricava $x^2 = \frac{1}{9}\,\text{cm}^2$ che porta a $x = \frac{1}{3}$ cm.

11. La risposta è **(D)**.
Dalla relazione contenuta nel problema si ricava:

$$(x+y)^2 - z^2 = 9\,,$$

ovvero

$$(x+y+z)(x+y-z) = 9\,.$$

Quindi $(x+y+z)$ e $(x+y-z)$ devono essere divisori di 9. In particolare, poichè x, y e z sono positivi, $(x+y+z)$ è positivo e quindi lo deve essere anche $(x+y-z)$. Il numero 9 può essere scomposto solo nei due modi $9 = 9 \times 1$, $9 = 3 \times 3$, come prodotto di interi positivi. Poichè $(x+y+z) > (x+y-z)$ (dato che $z > 0$) l'unica possibilità è

$$\begin{cases} x+y+z = 9 \\ x+y-z = 1 \end{cases}$$

Questo sistema porta a $z = 4$ e $x+y = 5$ e successivamente alle terne $(1,4,4)$, $(2,3,4)$, $(3,2,4)$, $(4,1,4)$. In tutto abbiamo quindi quattro soluzioni.

12. La risposta è **(C)**.
Un modo (non molto intuitivo!) per risolvere l'esercizio è quello di usare le frazioni generatrici di numeri periodici. Le frazioni generatrici di $0,\overline{60}$ e $0,\overline{70}$ sono rispettivamente

$$0,\overline{60} = \frac{60}{99}\,, \quad 0,\overline{70} = \frac{70}{99}\,.$$

Quindi

$$0,\overline{60} + 0,\overline{70} = \frac{130}{99} = 1 + \frac{31}{99} = 1 + 0,\overline{31} = 1,\overline{31}\,.$$

13. La risposta è **(C)**.
Dobbiamo considerare i multipli di 5 minori o uguali a 1000 che sono 200; a questi dobbiamo aggiungere i multipli di 7 minori o uguali a 1000, che sono 142. Otteniamo così $200+142 = 342$. A questi dobbiamo togliere i numeri che sono sia multipli di 5 che di 7, (perchè questi sono stati contati due volte): questi sono tutti e soli i multipli di 35 minori o uguali a 1000, ovvero 28. Complessivamente i numeri cercati sono $342 - 28 = 314$.

14. La risposta è **(E)**.
Supponiamo che ci siano almeno tre palline con su scritti numeri strettamente maggiori di zero; siano p, q e r i tre numeri scritti su queste tre palline. Il numero p, dovendo essere la somma dei numeri scritti su tutte le altre palline, sarà uguale alla somma di q, r e tutti i numeri scritti sulle altre 17 palline. Quindi $p \geq q + r$ e poichè $r > 0$ segue $p > q$. Ribaltando i ruoli di p e q si dimostra esattamente alla stessa maniera che $q > p$ e quindi si arriva ad una contraddizione. È quindi assurdo supporre che ci siano almeno tre palline con numeri strettamente positivi.

15. La risposta è **(C)**.
Consideriamo un percorso che parta da B; supponiamo che la prima strada percorsa sia BA. Se successivamente andiamo in C, non possiamo poi andare in B perchè rimarremmo bloccati, senza aver percorso tutte le strade. Se invece andiamo in D siamo poi obbligati ad andare in A rimanendo di nuovo bloccati e senza aver percorso la strada BC. Analogamente (il ragionamento è del tutto simmetrico) si dimostra che se partendo da B si va in C non è possibile completare il percorso con le caratteristiche richieste. Ancora per simmetria, questo dimostra anche che non esistono percorsi con le caratteristiche richieste che partano da D. Il percorso che parte da A:
$$A \to C \to B \to A \to D \to C$$
ha invece le caratteristiche richieste. Analogamente il percorso che parte da C:
$$C \to A \to B \to C \to D \to A$$
ha le proprietà richieste. In conclusione, esistono percorsi con le proprietà richieste solo partendo da A e da C.

16. La risposta è **(A)**.
Chiamiamo O il centro della circonferenza. L'angolo $\widehat{AOB}$ è di $120°$ e quindi l'angolo $\widehat{ACB}$ è di $60°$. Inoltre, essendo corde che sottendono ad archi di lunghezza uguali AC e AB hanno lunghezza uguale. Deduciamo che il triangolo ABC è equilatero. Di conseguenza
$$\text{area}(AOC) = \text{area}(BOC) = 25\frac{\sqrt{3}}{4}\,\text{cm}^2\,.$$
L'area del settore circolare delimitato dall'arco ADB è pari ad un terzo dell'area del cerchio, ovvero è
$$25\frac{\pi}{3}\,\text{cm}^2\,.$$
L'area cercata è la somma delle aree dei triangoli AOC e BOC e da quella del settore circolare che abbiamo appena calcolato:
$$25\frac{\sqrt{3}}{4}\,\text{cm}^2 + 25\frac{\sqrt{3}}{4}\,\text{cm}^2 + 25\frac{\pi}{3}\,\text{cm}^2 = 25\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}\right)\,\text{cm}^2\,.$$

17. La risposta è **(D)**.
Indichiamo con N il numero delle caselle di ciascuna riga e di ciascuna colonna della scacchiera. Indichiamo inoltre con M il numero di caselle della seconda colonna, successive, secondo la numerazione indicata, alla casella con il numero 38. Nella terza colonna ci sono allora M caselle che precedono la casella 43 nella numerazione indicata. Quindi $38+M+M+1=43$ da cui si ricava $M=2$. Allora l'ultima (nella numerazione indicata) casella della seconda colonna ha il numero $38+M=40$, ma chiaramente questa casella ha il numero $2N$ e quindi $N=20$ e il numero di caselle della scacchiera è $N^2=400$.

18. La risposta è **(B)**.
Indichiamo con a e b le misure dei lati AB e BC rispettivamente, e indichiamo con x la misura di DE in una certa unità di misura. Sappiamo che

$$\frac{1}{5}=\frac{b\,x}{2}\,\frac{2}{(a+a-x)b}=\frac{x}{2a-x}\,.$$

Dividiamo il numeratore e il denominatore dell'ultima frazione per x e otteniamo

$$\frac{1}{5}=\frac{1}{2\,\dfrac{a}{x}-1}\,.$$

Da questa uguaglianza possiamo ricavare il valore

$$\frac{a}{x}=3$$

che è il rapporto tra le misure di CD e DE.

19. La risposta è **(E)**.
Supponiamo che tutti gli abitanti di Papilla siano sporchi; se fossero anche tutti grassi, l'affermazione contenuta nel testo del problema, che sappiamo essere falsa, sarebbe vera. Quindi almeno uno degli abitanti è magro.

20. La risposta è **(D)**.
Supponiamo di aver scelto uno qualsiasi dei quindici giocatori della prima squadra; nella seconda squadra abbiamo la possibilità di scegliere tra quattordici giocatori (tutti eccettuato quello con lo stesso numero di maglia del giocatore scelto dalla prima squadra). Scelto anche il giocatore della seconda squadra, per scegliere il giocatore della terza squadra abbiamo tredici possibilità. Complessivamente abbiamo $15\times 14\times 13=2730$ possibilità distinte.